

# EINE NÄHERUNGSLÖSUNG FÜR DIE KONDENSATION VON LAMINAR STRÖMENDEM DAMPF MIT BELIEBIGEN DRUCKGRADIENTEN BEI KLEINER MACH-ZAHL UND KONSTANTEN STOFFWERTEN\*

MARTIN SCHMAL†

Technische Universität Berlin, Germany

(Received 27 March 1971 and in a revised form 15 July 1971)

**Zusammenfassung**—An einer beliebigen, in Strömungsrichtung gekrümmten Körperkontur strömen Dampf und Kondensat vorbei. In der Kondensatgrenzschicht wurden nur die Zähigkeitskräfte und der Wärmestrom durch Leitung berücksichtigt. In der Dampfgrenzschicht werden die Trägheits- und Reibungskräfte sowie die Druckkraft auftreten. Bei Sattedampf sind die Temperaturänderungen in der Dampfgrenzschicht vernachlässigbar. Das Problem wurde mit einem Näherungsverfahren gelöst. Die Integralbedingungen gelten für Strömungen mit beliebigen Druckgradienten bei gleichzeitigem Wärmeübergang. Das Geschwindigkeitsprofil in der Dampfgrenzschicht konnte als Funktion von zwei Formparametern dargestellt werden. Die örtlichen Grenzschichtgrößen und der örtliche Wärmeübergangskoeffizient wurden vom Staupunkt bis zum Ablösepunkt berechnet. Gegenüber dem von Shekrladze und Gomelaury angegebenen mittleren Wärmeübergangskoeffizienten enthält die in dieser Arbeit angegebene  $\bar{\alpha}$ -Zahl noch zusätzlich die Stoffwerte des Dampfes und ein Wärmeübergangsparameter.

## BEZEICHNUNGEN

### 1. Koordinaten und Längen

$D$ ,	Zylinderdurchmesser;
$E$ ,	Definitionsgröße Gleichung (3.10);
$F$ ,	Definitionsgröße Gleichung (3.8);
$G$ ,	Definitionsgröße Gleichung (3.9);
$L$ ,	Bezugsgröße,
$R$ ,	Querschnittsgröße;
$Z$ ,	Dickenparameter Gleichung (3.62);
$Z^*$ ,	Dimensionsloser Dickenparameter Gleichung (3.90);
$x$ ,	Koordinate längs der Strömungsrichtung;
$x^*$ ,	Dimensionslose Koordinate in $x$ -Richtung ( $x/L$ );

$y$ ,	Koordinate Senkrecht zur Strömungsrichtung;
$\eta$ ,	Dimensionslose Koordinate, Gleichungen (3.13) and (3.15);
$\delta_K$ ,	Kondensatgrenzschicht;
$\delta$ ,	Dampfgrenzschicht;
$\delta^*$ ,	Grenzschichtdicke des Dampfes Gleichung (3.15a);
$\delta_T$ ,	Thermische Grenzschicht;
$\delta_1$ ,	Verdrängungsdicke Gleichung (3.22);
$\delta_2$ ,	Impulsverlustdicke Gleichung (3.21);
$\delta_3$ ,	Energieverlustdicke Gleichung (3.26);
$\delta_4$ ,	Dichteverlustdicke Gleichung (3.27).

### 2. Geschwindigkeiten

$K_0$ ,	Geschwindigkeitsparameter Gleichung (3.47);
$U$ ,	Dimensionslose Geschwindigkeit Gleichung (3.12);
$u$ ,	Geschwindigkeitskomponente in $x$ -Richtung;
$v$ ,	Geschwindigkeitskomponente in $y$ -Richtung;

\* Genehmigte Dissertation von der Technischen Universität Berlin (Dr. Ing). Diese Arbeit wurde von den Herren Professoren Dr. Sc. R. Gregorig und Dr. Ing. H. Fernholz betreut und vom Deutschen Akademischen Austauschdienst (DAAD)-Conselho Nacional de Pesquisas (CNPq-Rio) unterstützt.

† COPPE- UFRJ, Universität Rio de Janeiro.

- $u_{\delta}^*$ , Potentialgeschwindigkeit Gleichung (3.90);
3. *Andere Grössen*
- $C_f$ , Örtlicher Reibungsbeiwert Gleichung (3.23);
- $F_1$ , Koeffizientenfunktion Gleichung (3.66);
- $F_2$ , Koeffizientenfunktion Gleichung (3.67);
- $F_3$ , Koeffizientenfunktion Gleichung (3.75);
- $F_4$ , Koeffizientenfunktion Gleichung (3.76);
- $H_{12}$ , Formparameter Gleichung (3.55);
- $H_{32}$ , Formparameter Gleichung (3.54);
- $Nu$ , Nusseltzahl;
- $P$ , Absoluter Druck;
- $Pr_K$ , Prandtl-Zahl Gleichung (3.12);
- $Re_{\delta_2}$ , Örtliche Reynoldszahl Gleichung (3.63);
- $Re_{\infty}$ , Reynoldszahl bei der Anströmung Gleichung (3.90);
- $Re_{p_{\infty}}$ , Reynoldszahl für den Kreiszylinder Gleichung (4.4);
- $K_T$ , Wärmeübergangsparameter Gleichung (3.11);
- $T$ , Temperatur;
- $c$ , Spezifische Wärme;
- $f$ , Dimensionslose Stromfunktion;
- $g$ , Fallbeschleunigung;
- $\dot{m}$ , Massenstromdichte;
- $\dot{q}$ , Wärmestromdichte;
- $r$ , Verdampfungswärme;
- $\alpha$ , Wärmeübergangskoeffizient Gleichung (3.95);
- $\bar{\alpha}$ , Mittlerer Wärmeübergangskoeffizient;
- $\alpha_t$ , Definitionsgrösse Gleichung (3.56);
- $\beta_t$ , Definitionsgrösse Gleichung (3.31);
- $\gamma$ , Formparameter Gleichung (3.60);
- $\Gamma$ , Formparameter Gleichung (3.64);
- $\zeta$ , Formparameter Gleichung (3.46);
- $\vartheta$ , Dimensionslose Temperatur Gleichung (3.14);
- $\lambda$ , Wärmeleitkoeffizient;
- $\mu$ , Dynamische Zähigkeit;
- $\nu$ , Kinematische Zähigkeit;
- $\rho$ , Dichte;
- $\sigma$ , Oberflächenspannung an der Phasengrenzfläche;
- $\tau$ , Schubspannung;
- $\varphi$ , Winkel.
4. *Indizes*
- $\infty$ , Grössen in der Anströmung;
- $0, w$ , Grössen an der Wand;
- $K$ , Grössen für des Kondensat;
- $\delta_K$ , Grössen an der Phasengrenzfläche;
- $\delta, e$ , Grössen am Aussenrand;
- $v$ , Ordnungsziffer.
- Grössen ohne Index beziehen sich auf die Dampfströmung.

#### 1. EINLEITUNG

SHEKRILADZE und Gomelaury [9] untersuchten die Filmkondensation eines laminar strömenden Dampfes an einer senkrechten Platte und an einem querangeströmten Kreiszylinder. In der Kondensatgrenzschicht wurden lineare Geschwindigkeits- und Temperaturprofile angenommen. Ähnlich wie Chen [1], der die Kondensation von ruhendem Dampf an einer ebenen senkrechten Platte behandelte, vereinfachten Shekriladze und Gomelaury ihre Lösung für den Fall von strömendem Dampf, indem sie als Randbedingung für die Kondensatgrenzschicht eine analoge zu Chen erweiterte Beziehung angeben

$$(\tau)_{\delta_K} - (\dot{m})_{\delta_K} (u_{\infty} - u_{\delta_K}) = 0,$$

d.h. die Schubspannung an der Phasengrenzfläche ist gleich dem Impuls des eindringenden Dampfes. Damit wird die Grenzschichtrechnung nur für die Kondensatströmung und nicht für die Dampfströmung durchgeführt. Denny und Mills [2] erweiterten das Modell von Shekriladze und Gomelaury [9], indem gleichzeitig die Schwerkraft berücksichtigt wurde. In beiden Arbeiten wurden die Trägheitskräfte und Druckkräfte im Dampf- und Kondensatgrenzschicht vernachlässigt. Aus der

Grenzschichttheorie ist bekannt, dass dieser Druckgradient bei einer vorgeschriebenen Geschwindigkeitsverteilung der Potentialströmung nicht vernachlässigt werden darf.

Bei erzwungener Konvektion können unter Umständen die Trägheitskräfte grösser als die Schwerkraft sein; in manchen Fällen sind sie von gleicher Grössenordnung. Qualitative Aussagen hierüber sind mit Hilfe der Froudezahl  $Fr = (u_\infty^2/gx)$  möglich. So müssen nur die Trägheitskräfte berücksichtigt werden, wenn die Froudezahl grösser als 2000 ist. Bei  $Fr < 1$  überwiegt die Schwerkraft gegenüber den Trägheitskräften. Im Zwischenbereich der Froudezahlen müssen gleichzeitig die Schwerkraft und

werden unter Voraussetzungen der Ergebnisse von Arbeiten anderer Autoren z.B. Koh et al [5] vernachlässigt. Die Lösung gilt weder für sehr kleine Prandtlzahlen noch für zu kleine Anströmgeschwindigkeiten. Ziel der Arbeit ist es, ein ausführliches Näherungsverfahren für Zweiphasenströmungen mit beliebigen Druckgradienten mit Wärmeübergang zu entwickeln, dessen Grundvorstellungen sich bei der Behandlung von Problemen der Einphasenströmungsgrenzschichten bewährt haben [7].

## 2. FORMULIERUNG DES PROBLEMS

Bild 1 dient zur Erläuterung einer Modellvorstellung für das hier behandelte Kondensa-

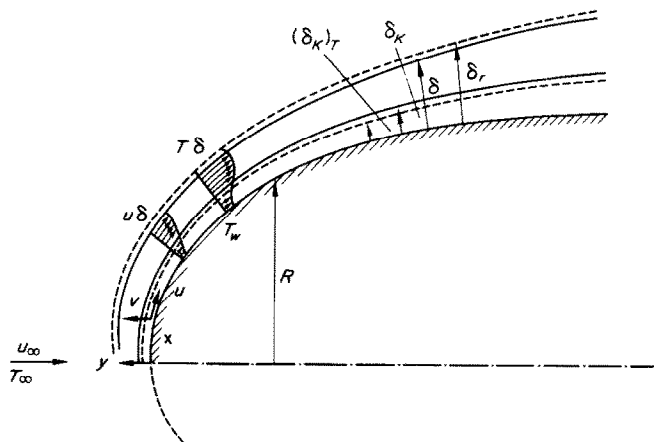


BILD 1. Schema eines Zweiphasenströmungsproblem Geschwindigkeits- und Temperaturverteilungen in den Grenzschichten (Strömungs- und Temperaturgrenzschichten im Dampf und Kondensat).

die Trägheitskräfte in die Rechnung einbezogen werden.

In der vorliegenden Arbeit wird die Filmkondensation von laminar strömendem Dampf mit beliebigen Druckgradienten in Strömungsrichtung untersucht. Bei der zu analysierenden Zweiphasenströmungsgrenzschicht "Dampf-Kondensat" werden die Trägheitskräfte in der Dampfrenzschicht und die Übergangsbedingungen an der Phasengrenzfläche Dampf-Kondensat berücksichtigt. Die Schwerkraft wird unter obigen Voraussetzungen ( $Fr > 2000$ ) und laminarer Dampfströmung vernachlässigt. Die Trägheitskräfte in der Kondensatrenzschicht

tionsproblem. Von einem kondensierenden Dampf wird mit der Geschwindigkeit  $u_\infty$  und der Temperatur  $T_\infty$  ein Körper angeströmt, dessen Kontur in Strömungsrichtung gekrümmt ist. Durch die Umströmung der Kontur ist am Rande der sich ausbildenden Grenzschicht eine Potentialgeschwindigkeit  $u_{\delta_e}(x)$  und eine Temperaturverteilung  $T_{\delta_e}(x)$  vorgegeben.

Liegt die Wandtemperatur des Körpers unter der Sattdampftemperatur  $T_s$ , so bildet sich längst der Wand ein strömender Kondensatfilm. In der Dampf- und Kondensatströmung bilden sich Strömungs- und Temperaturgrenzschichten entsprechend den Voraussetzungen

einer Grenzschicht 1. Ordnung. Sie haben unterschiedlichen Verlauf und entwickeln sich je nach Verlauf der Druckgradienten im stationären Zustand kontinuierlich bis zur Ablösung. Die sich in den Grenzschichten entwickelnden Geschwindigkeits- und Temperaturprofile werden durch die Grenzschichtgleichungen beschrieben.

### 2.1 Annahmen

- (a) Reiner Dampf und Kondensat strömen laminar und stationär.
- (b) Die Potentialströmung und die Temperaturverteilung am Aussenrand der Grenzschichten sind vorgegeben.
- (c) Die Mach-Zahl der Strömung ist klein.
- (d) Chemische Reaktionen in den Grenzschichten und an der Wand werden ausgeschlossen.
- (e) Undurchlässige Wand ( $v_w = 0$ )
- (f) Konstante Wandtemperatur ( $T_w = \text{const.}$ )
- (g) Der Grenzflächenwiderstand an der Phasengrenzfläche ist vernachlässigbar.
- (h) Die Oberflächenspannung längs der Phasengrenzfläche ist konstant.

### 2.2 Die Grenzschichtgleichungen

Aufbauend auf den Ergebnissen der Arbeit von Koh *et al.* [5] sollen in der Kondensatgrenzschicht die Trägheitskräfte und die konvektiven Wärmeströme vernachlässigt werden. Hinsichtlich der Trägheitskräfte bedeutet das, dass diese Lösung für sehr kleine Prandtlzahlen ungenau wird. Da die Prandtlzahl von Wasser jedoch bei 2.0 liegt, d.h.  $Pr_K > 1$  ist, darf man diese Einschränkung mit guter Berechtigung machen. Ferner soll der Druckgradient in der Kondensatgrenzschicht unberücksichtigt bleiben. Wenn das Verhältnis der Dichten von Dampf und Kondensat sehr klein ist, ist dieses zulässig, wie aus einer Abschätzung hervorgeht. Die Stoffwerte des Kondensats seien konstant. Die Anströmgeschwindigkeit des Dampfes  $u_\infty$  sei so gross, dass man bei einer laminaren Dampfströmung in dem Bereich der Froudezahl ist, in dem der Einfluss der Schwerkraft gegenüber den anderen Termen der Bewegungsgleichung

vernachlässigt werden kann. Nach der Beziehung  $Re_\infty Fr_\infty = u_\infty^3 / (g v_\infty)$  kann man mit diesen Voraussetzungen die minimale Anströmgeschwindigkeit des Dampfes berechnen. Bei Sattdampf Temperatur sind die Temperaturänderungen in der Dampfgrenzschicht vernachlässigbar klein, d.h. die konvektiven Wärmeströme und der Wärmestrom durch Leitung sind in der Energiegleichung vernachlässigbar. Die Reibungswärme in der Dampfgrenzschicht wurde, wie es auch bei den bisher bekannten Arbeiten über Kondensation, ohne Beweis vernachlässigt [5, 9, 10]. Die Energiegleichung in der Dampfgrenzschicht wurde deshalb vernachlässigt. Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich folgendes System von Gleichungen:

Für die Kondensatgrenzschicht:

$$\frac{\partial u_K}{\partial x} + \frac{\partial v_K}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial^2 u_K}{\partial y^2} = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial^2 T_K}{\partial y^2} = 0. \quad (2.3)$$

Für die Dampfgrenzschicht:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (2.4)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{dP}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.5)$$

### 2.3 Die Rand- und Übergangsbedingungen

An der Wand gelten folgende Randbedingungen, wobei der Index K das Kondensat und die Indizes 0 und w die Wand kennzeichnen.

R.B. 1 Haftbedingung an der Wand und undurchlässige Wand:

$$(u_K)_0 = 0, \quad (2.6)$$

$$(v_K)_0 = 0. \quad (2.7)$$

R.B. 2 Konstante Wandtemperatur:

$$(T_K)_0 = T_w. \quad (2.8)$$

Am Aussenrand  $\delta_e$  werden folgende Randbedingungen benötigt ( $\delta_e$  bezeichnet den Rand der äussersten Grenzschicht):

R.B. 3 Die Geschwindigkeitskomponente in  $x$ -Richtung ist gleich der Potentialgeschwindigkeit

$$(u)_\delta = u_{\delta_e}(x) = u_\delta(x). \quad (2.9)$$

R.B. 4 Die Temperatur am Aussenrand der Temperaturgrenzschicht ist gleich der Sättigungstemperatur

$$(T)_\delta = T_{\delta_e} = T_s. \quad (2.10)$$

An der Phasengrenzfläche zwischen Dampf und Kondensat ( $y = \delta_K$ ) sind folgende Übergangsbedingungen zu berücksichtigen:

Ü.B. 1 Geschwindigkeit an der Phasengrenzfläche: An der Phasengrenzfläche gehen die Geschwindigkeiten des Dampfes und des Kondensats in  $x$ -Richtung kontinuierlich ineinander über. Es gilt also:

$$(u_K)_{\delta_K} = (u)_{\delta_K}. \quad (2.11)$$

Ü.B. 2 Temperaturen an der Phasengrenzfläche: Der Grenzflächenwiderstand an der Phasengrenzfläche Dampf-Kondensat wurde vernachlässigt. Das hat zur Folge, dass die Temperaturen des Kondensats und des Dampfes an der Phasengrenzfläche gleich sind.

$$(T_K)_{\delta_K} = (T)_{\delta_K}. \quad (2.12)$$

Ü.B. 3 Massenstrom durch die Phasengrenzfläche: Für den Massenstrom durch die Phasengrenzfläche gilt aus Kontinuitätsgründen

$$(\dot{m}_K)_{\delta_K} = (\dot{m})_{\delta_K}. \quad (2.13)$$

Aus einer Massenbilanz aus einem Kontrollgebiet an der Phasengrenzfläche ergibt sich der gleichwertige Ausdruck

$$(\rho_K u_K)_{\delta_K} \frac{d\delta_K}{dx} - (\rho_K v_K)_{\delta_K} = (\rho u)_{\delta_K} \frac{d\delta_K}{dx} - (\rho v)_{\delta_K}. \quad (2.14)$$

Ü.B. 4 Die Oberflächenspannung an der Phasengrenzfläche ist konstant, so dass die Schubspannungen auf beiden Seiten der Grenzfläche gleich sind.

$$(\tau_K)_{\delta_K} = (\tau)_{\delta_K} \quad (2.15)$$

Ü.B. 5 Wärmestrom durch die Phasengrenzfläche: An der Phasengrenzfläche ist der Wärmestrom des Dampfes gleich dem Wärmestrom des Kondensats

$$(\dot{q}_K)_{\delta_K} = (\dot{q})_{\delta_K}. \quad (2.16)$$

Bei Sättigungstemperatur und Vernachlässigung des Grenzflächenwiderstandes wurden auf der Dampfseite nur die Kondensationsenthalpie und auf der Kondensatseite nur die durch Leitung übertragene Wärme berücksichtigt [5]. Für kleine Mach-Zahlen und Dampf, der sich wie ein ideales Gas verhält, ist  $h = c_p T$ . Es ergibt sich

$$\lambda_K \left. \frac{\partial T_K}{\partial y} \right|_{\delta_K} = (\dot{m})_{\delta_K} r, \quad (2.17)$$

mit  $r$  als Verdampfungswärme.

Bei der Frage der Lösbarkeit eines solchen Gleichungssystems spielt der potentialtheoretische Druckgradient und damit der Druckverlauf  $p(x)$  eine entscheidende Rolle. Der Druckverlauf  $p(x)$  kann durch den Geschwindigkeitsgradienten  $du_\delta/dx$  ersetzt werden [8]. Dies ergibt sich aus der Bewegungsgleichung (2.5), wenn  $y = \delta_e$ ,  $(\tau)_{\delta_e} = 0$  und  $(u)_\delta = u_{\delta_e} = u_\delta(x)$  gesetzt werden.

$$\rho_\delta u_\delta \frac{du_\delta}{dx} = - \frac{dP}{dx}. \quad (2.18)$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten des Geschwindigkeitsprofil-Ansatzes in der Dampf-grenzschicht benötigt man eine weitere Übergangsbedingung an der Phasengrenzfläche. Aus der Bewegungsgleichung (2.5) erhält man mit Hilfe von Gleichung (2.18) folgende Übergangsbedingung für  $y = \delta_K$ :

Ü.B. 6

$$(\rho)_{\delta_K} \left[ (u)_{\delta_K} \frac{du_{\delta_K}}{dx} + (v)_{\delta_K} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\delta_K} \right] = \rho_\delta u_\delta \frac{du_\delta}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{\delta_K} \quad (2.19)$$

### 3. NÄHERUNGSLÖSUNG

Bei einer Näherungslösung werden zunächst Ansätze für Geschwindigkeits- und Temperaturprofile gemacht, die bei beliebiger Aussenströmung und Wandtemperaturverteilung alle auftretenden Profile gut wiedergeben.

Bei einer Zweiphasenströmung können die aus der mathematischen Untersuchung der laminaren Einphasenströmung bekannten ein- oder zweiparametrischen Lösungsansätze für das Geschwindigkeitsprofil nicht übernommen werden, da die Übergangsbedingungen an der Phasengrenzfläche verschieden sind von den Randbedingungen der Einphasenströmung. Wenn man dies beachtet, lassen sich aber in analoger Weise Polynomansätze für das Geschwindigkeits- und das Temperaturprofil ansetzen.

Für die Kondensatgrenzschicht lassen sich unter den in Abschnitt (2.1) genannten Annahmen die Geschwindigkeits- und Temperaturprofile direkt aus der Integration der Bewegungs- und Energiegleichung gewinnen. Da bei Sattedampf in der Dampfgrenzschicht die Temperaturänderungen vernachlässigbar klein sind, muss man nur noch einen Lösungsansatz für das Geschwindigkeitsprofil machen. Die Koeffizienten dieses Polynomansatzes lassen sich als Funktion von Formparametern darstellen. Die Unbekannten—zwei Formparameter, die Grenzschichtdicken des Kondensats  $\delta_K(x)$  und des Dampfes  $\delta(x)$ , die Geschwindigkeitskomponente an der Phasengrenzfläche  $u_{\delta_K}(x)$ —müssen mit Hilfe von Integralbedingungen und Übergangsbedingungen bestimmt werden.

In den folgenden Abschnitten werden die Integralbedingungen für Zweiphasenströmungen mit Wärmeübergang, die Geschwindigkeits- und Temperaturprofile in der Dampf- und der Kondensatgrenzschicht und das Näherungsverfahren ausführlich beschrieben.

#### 3.1 Die Integralbedingungen der Zweiphasenströmung

Zur Herleitung von Integralbedingungen geht man nach dem Wieghardtschen mathematischen

Prinzip [11] vor, integriert über die Dampfgrenzschicht von  $\delta_K$  bis  $\delta$ .

Multipliziert man die Gleichungen (2.4) und (2.5) vor dem partiellen Integrieren mit einer "Gewichtsfunktion", so erhält man eine unendliche Zahl von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Wieghardt [12] wählte aus Gründen der Zweckmässigkeit als "Gewichtsfunktion" eine Potenz von  $u$ . Man multipliziert die Bewegungsgleichung (2.5) mit  $u^v$  und die Kontinuitätsgleichung (2.4) mit  $u^{v+1}/(v+1)$  und erhält nach Addition (Vgl. Walz [11])

$$\frac{1}{v+1} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^{v+2}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v u^{v+1}) \right] = -u^v \frac{dP}{dx} + u^v \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (3.1)$$

Diese Gleichung wird nun partiell integriert zwischen dem Rand der Kondensatgrenzschicht  $\delta_K(x)$  und dem Rand der Dampfgrenzschicht  $\delta(x)$ .

$$\int_{\delta_K}^{\delta} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^{v+2}) dy + \rho v u^{v+1} \Big|_{\delta_K}^{\delta} = (v+1) \left[ -\frac{dP}{dx} \int_{\delta_K}^{\delta} u^v dy + \int_{\delta_K}^{\delta} u^v \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \right]. \quad (3.2)$$

Die Geschwindigkeitskomponente in  $y$ -Richtung am Aussenrand der Dampfgrenzschicht  $v_\delta$  wird aus der Kontinuitätsgleichung (2.4) bestimmt:

$$\rho v \Big|_{\delta_K}^{\delta} = - \int_{\delta_K}^{\delta} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dy. \quad (3.3)$$

Nach Einsetzen und einer Umformung erhält man folgende Integralbedingung:

$$\frac{d}{dx} \int_{\delta_K}^{\delta} \rho u^{v+2} dy - u_{\delta}^{v+1} \frac{d}{dx} \int_{\delta_K}^{\delta} \rho u dy + u_{\delta}^{v+1} \left[ 1 - \left( \frac{u_{\delta_K}}{u_{\delta}} \right)^{v+1} \right]$$

$$\left[ (\rho v)_{\delta_K} - (\rho u)_{\delta_K} \frac{d\delta_K}{dx} \right] = (v+1) \left[ -\frac{dP}{dx} \int_{\delta_K}^{\delta} u^v dy + \int_{\delta_K}^{\delta} u^v \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \right]. \quad (3.4)$$

In Gleichung (3.4) ist der Ausdruck

$$\left[ (\rho v)_{\delta_K} - (\rho u)_{\delta_K} \frac{d\delta_K}{dx} \right]$$

der Massenstrom des Dampfes an der Phasengrenzfläche. Er wird mit Hilfe der Übergangsbedingung Ü.B. 3- Kontinuität des Massenstromes an der Phasengrenzfläche ermittelt. Zunächst benötigt man den Ausdruck für den Massenstrom auf der Kondensatseite der Phasengrenzfläche. Er wird aus der Kontinuitätsgleichung für das Kondensat, Gleichung (2.1), bestimmt. Die Integration von Gleichung (2.1) ergibt:

$$(\rho_K u_K)_{\delta_K} \frac{d\delta_K}{dx} - (\rho_K v_K)_{\delta_K} = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_K} \rho_K u dy. \quad (3.5)$$

Mit der Ü.B. 3 nach Gleichung (2.14) und Gleichung (3.5) erhält man für den Massenstrom des Dampfes an der Phasengrenzfläche die Beziehung

$$(\rho u)_{\delta_K} \frac{d\delta_K}{dx} - (\rho v)_{\delta_K} = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_K} \rho_K u dy. \quad (3.6)$$

Nach dem Einsetzen von Gleichung (3.6) in Gleichung (3.4) erhält man folgende Integralgleichung:

$$\frac{d}{dx} \int_{\delta_K}^{\delta} \rho u^{v+2} dy - u_{\delta}^{v+1} \frac{d}{dx} \int_{\delta_K}^{\delta} \rho u dy - u_{\delta}^{v+1} \left[ 1 - \left( \frac{u_{\delta_K}}{u_{\delta}} \right)^{v+1} \right]$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_K} \rho_K u dy = (v+1) \left[ -\frac{dP}{dx} \int_{\delta_K}^{\delta} u^v dy + \int_{\delta_K}^{\delta} u^v \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \right] \quad (3.7)$$

In dieser Form kann Gleichung (3.7) mit entsprechenden Beziehungen aus den bekannten Arbeiten verglichen werden, wenn Vereinfachungen gemacht werden, die gleichbedeutend sind mit den von diesen Autoren verwendeten Voraussetzungen. In allen bekannten Untersuchungen des Kondensationsproblems wurde der Druckgradient und die Ordnungsziffer  $v$  gleich Null gesetzt. Das bedeutet, dass nur der Impulssatz ohne Druckgradient verwendet wurde. Ausserdem vereinfacht sich Gleichung (3.7) wenn – wie in den Arbeiten von Koh *et al.* [5] und Koh [6] – ruhender Dampf ( $u_{\delta} = 0$ ) mit konstanten Stoffwerten kondensiert. Man kommt auf Gleichung (8) in der Arbeit von Koh [6]. Weiterhin vernachlässigten Shekrladze und Gomelauri [9] die ersten zwei Terme der Gleichung (3.7), wenn strömender Dampf mit konstanten Stoffwerten kondensiert, was nicht einzusehen ist. Dann erhält man Gleichung (7) in [9]. Schliesslich kann man Gleichung (3.7) mit den Gleichungen für Einphasenströmungsgrenzschichten vergleichen. Es existiert in diesem Fall nur eine Grenzschichtdicke,  $\delta_K$  ist also Null. Wieghardt [12] und Walz [11] verwendeten ausser dem Impulssatz ( $v = 0$ ) den Energiesatz, den man aus Gleichung (3.7) erhält, wenn man  $v = 1$  setzt. In Gleichung (3.7) entfällt dann der 3. Term, und man kommt auf Gleichung (3.35) bei Walz [11].

Während bei der Behandlung von Einphasenströmungen mit einem zweiparametrischen Lösungsansatz (vgl. z. B. Geropp [4]) für das Geschwindigkeitsprofil drei Unbekannte, nämlich zwei Formparameter und eine Grenzschichtdicke und die drei Gleichungen Impulssatz, Energiesatz und Wandbindung 1. Art vorhanden sind, kommen bei Kondensations-

problemen noch zwei Unbekannte hinzu. Dieses sind die Kondensatgrenzschichtdicke  $\delta_K(x)$  und die Geschwindigkeitskomponente in  $x$ -Richtung an der Phasengrenzfläche  $u_{\delta_K}(x)$ . Man benötigt folglich noch zwei Gleichungen, die man aus den Übergangsbedingungen an der Phasengrenzfläche erhält.

### 3.2 Die Integralbedingungen mit den Übergangsbedingungen

Es ist zweckmässig, die Integralbedingungen Gleichung (3.7) so umzuformen, dass die physikalisch nicht klar definierbaren Grenzschichtdicken eliminiert werden. Dabei müssen die neuen Grössen so definiert sein, dass sie praktisch unabhängig von der Definition von  $\delta_K$  und  $\delta$  sind. Die Umformung der Integralbedingung Gleichung (3.7) soll auch gleichzeitig die erforderlichen Übergangsbedingungen an der Phasengrenzfläche berücksichtigen. Die entsprechenden Gleichungen sollen allgemein für die Kondensation umströmter Körper bei kleinen Mach-Zahlen und variablen Stoffwerten gültig sein.

Analog zu Walz [11] definiert man hier folgende Grössen:

$$F_v = \int_{\delta_K}^{\delta} \frac{\rho}{\rho_{\delta}} \frac{u}{u_{\delta}} \left[ 1 - \left( \frac{u}{u_{\delta}} \right)^{v+1} \right] dy, \quad (3.8)$$

$$G_v = (v+1) \int_{\delta_K}^{\delta} \frac{\rho}{\rho_{\delta}} \frac{u}{u_{\delta}} \left[ \frac{\rho_{\delta}}{\rho} \left( \frac{u}{u_{\delta}} \right)^{v-1} - 1 \right] dy, \quad (3.9)$$

$$E_v = (v+1) \int_{\delta_K}^{\delta} \left( \frac{u}{u_{\delta}} \right)^v \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\tau}{\rho_{\delta} u_{\delta}^2} \right) dy. \quad (3.10)$$

Ferner werden folgende Kennzahlen eingeführt [1, 5]:

$$K_T = \frac{c_K(T_{\delta_K} - T_w)}{Pr_K r}, \quad (3.11)$$

$$Pr_K = \frac{\mu_K c_K}{\lambda_K} \quad (3.12)$$

und folgende dimensionslose Variable definiert [8, 10]:

$$U = \frac{u}{u_{\delta}}, \quad (3.12)$$

$$\eta_K = \frac{y}{\delta_K}, \quad (3.13)$$

$$\vartheta = \frac{T - T_w}{T_{\delta_K} - T_w} \quad (3.14)$$

und analog zu Gruschwitz [zit. 8]:

$$\eta = \frac{1}{\delta^*} \int_{\delta_K}^{\delta} \frac{\rho}{\rho_{\delta}} dy, \quad (3.15)$$

$$\delta^* = \int_{\delta_K}^{\delta} \frac{\rho}{\rho_{\delta}} dy. \quad (3.15a)$$

Bevor man diese Definitionsgrössen einsetzt, ist es zweckmässig, den unbekannten Ausdruck

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_K} \rho_K u dy$$

zu ersetzen. Hierfür verwendet man die Übergangsbedingung Ü.B. 5—Kontinuität des Wärmestromes an der Phasengrenzfläche. Mit Gleichung (2.17) und Gleichung (3.6) erhält man folgende Beziehung:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_K} \rho_K u dy = \frac{\lambda_K}{r} \frac{\partial T}{\partial y} \bigg|_{\delta_K}, \quad (3.16)$$

oder mit Gleichung (3.11) bis (3.14):

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_K} \rho_K u dy = \frac{\mu_K}{\delta_K} K_T \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta_K} \bigg|_{\eta_K=1} \quad (3.17)$$

Gleichung (3.17) enthält aber noch die unbekannte Grenzschichtdicke des Kondensats  $\delta_K(x)$ , die man mit Hilfe der Übergangsbedingung Ü.B. 4 — gleiche Schubspannungen des Dampfes und des Kondensats an der Phasengrenzfläche—



durch die Grenzschichtdicke des Dampfes  $\delta^*$  ersetzen kann. Mit Gleichung (3.13) und Gleichungen (3.14) und (3.15) erhält man folgenden Ausdruck für Ü.B. 4 aus Gleichung (2.15):

$$\left. \frac{\mu_K}{\delta_K} \frac{\partial(u/u_\delta)}{\partial \eta_K} \right|_{\eta_K=1} = \frac{\mu}{\delta^*} \frac{\partial(u/u_\delta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} \quad (3.18)$$

Nach Zwischenrechnungen ergibt sich die allgemeine Integralbedingung in der Dampfgrenzschicht in folgender Form:

$$\begin{aligned} \frac{dF_v}{dx} + \left[ (v+2) + \frac{G_v}{F_v} + \frac{d\rho_\delta/dx}{\rho_\delta} \cdot \frac{u_\delta}{du_\delta/dx} \right] \\ \frac{F_v}{u_\delta} \frac{du_\delta}{dx} + \left[ 1 - \left( \frac{u_{\delta_K}}{u_\delta} \right)^{v+1} \right] \frac{\mu}{\rho_\delta u_\delta \delta^*} \\ \times \frac{\frac{\partial U}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0}}{\frac{\partial U_K}{\partial \eta_K} \Big|_{\eta_K=1}} \cdot K_T \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta_K} \Big|_{\eta_K=1} + E_v = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Da  $v$  beliebige Werte annehmen kann, erhält man aus Gleichung (3.19) unendlich viele Integralbedingungen mit ebensovielen Unbekannten. Diese Integralbedingungen gelten für Strömungen mit Wärmeübergang, für beliebige Aussenströmung, konstante oder variable Stoffwerte und kleine Mach-Zahlen.

### 3.3 Impuls- und Energiesatz

Physikalisch können bisher nur zwei Integralbedingungen interpretiert werden [11].

Aus Gleichung (3.19) erhält man für  $v=0$  den Impulssatz

$$\begin{aligned} \frac{dF_0}{dx} + \left[ 2 + \frac{G_0}{F_0} + \frac{1}{\rho_\delta} \frac{d\rho_\delta}{dx} \cdot \frac{u_\delta}{du_\delta/dx} \right] \\ \frac{F_0}{u_\delta} \frac{du_\delta}{dx} + \left( 1 - \frac{u_{\delta_K}}{u_\delta} \right) \frac{\mu_{\delta_K}}{\rho_\delta u_\delta \delta^*} \\ \times \frac{\frac{\partial U}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0}}{\frac{\partial U_K}{\partial \eta_K} \Big|_{\eta_K=1}} \cdot K_T \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta_K} \Big|_{\eta_K=1} + E_0 = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Die Definitionsgrößen, Gleichungen (3.8) bis (3.10) haben für  $v=0$  folgende physikalische Bedeutung und werden mit Gleichungen (3.12), (3.14) und (3.15) umgeformt:

Impulsverlustdicke  $\delta_2$ :

$$\delta_2 = F_0 = \int_{\delta_K}^{\delta} \frac{\rho}{\rho_\delta} \frac{u}{u_\delta} \left( 1 - \frac{u}{u_\delta} \right) dy = \delta^* \int_0^1 U(1-U) d\eta, \quad (3.21)$$

Verdrängungsdicke  $\delta_1$ :

$$\begin{aligned} \delta_1 = G_0 = \int_{\delta_K}^{\delta} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_\delta} \frac{u}{u_\delta} \right) dy = \delta^* \int_0^1 \frac{\rho_\delta}{\rho} \\ \times \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_\delta} U \right) d\eta, \end{aligned} \quad (3.22)$$

Reibungsbeiwert an der Phasengrenzfläche  $C_f$ :

$$\begin{aligned} C_f = -E_0 = - \frac{\tau}{\rho_\delta u_\delta^2} \Big|_{\delta_K}^{\delta} = \frac{\tau_{\delta_K}}{\rho_\delta u_\delta^2} = \frac{\mu_{\delta_K}}{\delta^*} \\ \times \frac{1}{\rho_\delta u_\delta} \frac{\partial U}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Nach dem Einsetzen in Gleichung (3.20) ergibt sich der Impulssatz:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_2}{dx} + \left( 2 + \frac{\delta_1}{\delta_2} + \frac{d\rho_\delta/dx}{\rho_\delta} \frac{u_\delta}{du_\delta/dx} \right) \frac{\delta_2}{u_\delta} \frac{du_\delta}{dx} \\ + (1 - K_0) \frac{\mu_{\delta_K}}{\delta^*} \frac{U'(0)}{U_K'(1)} K_T \frac{\vartheta'(1)}{\rho_\delta u_\delta} - C_f = 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

wobei (') die Ableitung nach  $\eta_K$  und  $\eta$  bedeutet und

$$K_0 = \frac{u_{\delta_K}}{u_\delta}.$$

Aus Gleichung (3.19) erhält man für  $v=1$  den Energiesatz

$$\begin{aligned} \frac{dF_1}{dx} + \left( 3 + \frac{G_1}{F_1} + \frac{d\rho_\delta/dx}{\rho_\delta} \frac{u_\delta}{du_\delta/dx} \right) \frac{F_1}{u_\delta} \frac{du_\delta}{dx} \\ + \left[ 1 - \left( \frac{u_{\delta_K}}{u_\delta} \right)^2 \right] \frac{\mu_{\delta_K}}{\rho_\delta \mu_\delta \delta^*} \frac{\frac{\partial U}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0}}{\frac{\partial U_K}{\partial \eta_K} \Big|_{\eta_K=1}} \\ \times K_T \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta_K} \Big|_{\eta_K=1} + E_1 = 0. \quad (3.25) \end{aligned}$$

Analog erhalten die Definitionsgrößen Gleichungen (3.8)–(3.10) folgende Bedeutung und werden mit Gleichungen (3.12), (3.14) und (3.15) umgeformt:

Energieverlustdicke  $\delta_3$ :

$$\begin{aligned} \delta_3 = F_1 = \int_{\delta_K}^{\delta} \frac{\rho}{\rho_\delta} \frac{u}{u_\delta} \left[ 1 - \left( \frac{u}{u_\delta} \right)^2 \right] dy = \delta^* \\ \times \int_0^1 U(1 - U^2) d\eta, \quad (3.26) \end{aligned}$$

Dichteverlustdicke  $\delta_4$ :

$$\begin{aligned} \delta_4 = \frac{G_1}{2} = \int_{\delta_K}^{\delta} \frac{\rho}{\rho_\delta} \frac{u}{u_\delta} \left( \frac{\rho_\delta}{\rho} - 1 \right) dy = \delta^* \\ \times \int_0^1 U \left( \frac{\rho_\delta}{\rho} - 1 \right) d\eta, \quad (3.27) \end{aligned}$$

Dissipationsintegral an der Phasengrenzfläche  $C_D$ :

Aus Gleichung (3.10) erhält man nach Umformung:

$$E_1 = 2 \int_{\delta_K}^{\delta} \frac{u}{u_\delta} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\tau}{\rho_\delta u_\delta^2} \right) dy = \frac{2}{\rho_\delta u_\delta^3} \int_{\delta_K}^{\delta} u \frac{\partial \tau}{\partial y} dy. \quad (3.28)$$

Mit  $\tau_\delta = 0$  und nach partieller Integration folgt:

$$\begin{aligned} E_1 = -2 \frac{u_{\delta_K}}{u_\delta} \frac{\tau_{\delta_K}}{\rho_\delta u_\delta^2} - \frac{2}{\rho_\delta u_\delta^3} \int_{\delta_K}^{\delta} \mu \frac{\partial u}{\partial y} dy = \\ 2(K_0 C_f + C_D), \quad (3.29) \end{aligned}$$

mit

$$C_D = \int_{u_{\delta_K}}^{u_\delta} \mu \frac{\partial u}{\partial y} du = \frac{\mu_{\delta_K} \beta_e}{\rho_\delta \mu_\delta \delta_2} \quad (3.30)$$

und

$$\beta_e = \int_{\delta_K/\delta_2}^{\delta/\delta_2} \frac{\mu_\delta}{\mu_{\delta_K}} \left[ \frac{\partial(u/u_\delta)}{\partial(y/\delta_2)} \right]^2 d(y/\delta_2). \quad (3.31)$$

Nach dem Einsetzen in Gleichung (3.25) erhält man den Energiesatz:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_3}{dx} + \left( 3 + 2 \frac{\delta_4}{\delta_3} + \frac{d\rho_\delta/dx}{\rho_\delta} \frac{u_\delta}{du_\delta/dx} \right) \frac{\delta_3}{u_\delta} \frac{du_\delta}{dx} \\ + (1 - K_0^2) \frac{\mu_{\delta_K}}{\delta^*} \frac{U'(1)}{U_K'(1)} K_T \frac{\vartheta'(1)}{\rho_\delta \mu_\delta} \\ - 2(K_0 C_f + C_D) = 0. \quad (3.32) \end{aligned}$$

Für weitere Rechnungen werden folgende Quotienten gebildet:

$$H_{12} = \frac{\delta_1}{\delta_2}, \quad (3.33)$$

$$H_{32} = \frac{\delta_3}{\delta_2}. \quad (3.34)$$

### 3.4 Geschwindigkeits- und Temperaturverteilungen in den Grenzschichten

3.4.1 *Kondensatgrenzschicht.* Die Geschwindigkeits- und Temperaturprofile lassen sich mit den vorausgesetzten Annahmen als exakte Lösungen der Gleichungen (2.2) und (2.3) angeben, da die Bewegungs- und Energiegleichung mit den entsprechenden Randbedingungen direkt integriert werden kann.

Die Bewegungsgleichung, Gleichung (2.2), wird mit den Randbedingungen

$$\text{R.B. 1 } y = 0 \quad u = 0,$$

$$\text{R.B. 2 } y = \delta_K \quad u = (u_K)_{\delta_K},$$

integriert. Mit den definierten dimensionslosen Variablen in Gleichungen (3.12) und (3.13) ergibt sich:

$$U_K(\eta_K) = \frac{(u_K)_{\delta_K}}{u_\delta} \eta_K. \quad (3.35)$$

Analog wird die Energiegleichung, Gleichung (2.3), mit den Randbedingungen

$$\text{R.B. 3 } y = 0 \quad T = T_w = \text{const.},$$

$$\text{R.B. 4 } y = \delta_K \quad T = T_s = \text{const.}$$

integriert und mit den dimensionslosen Variablen Gleichungen (3.13), (3.14) erhält man folgende Beziehung:

$$\vartheta(\eta_K) = \eta_K. \quad (3.36)$$

**3.4.2 Dampfgrenzschicht.** In der Dampfgrenzschicht ist wegen der Annahme, dass die Temperaturänderungen im Sattedampfzustand vernachlässigbar klein sind, nur noch der Lösungsansatz für das Geschwindigkeitsprofil zu machen. Dieser Lösungsansatz ist neben der Auswahl der Integralbedingungen entscheidend für die Genauigkeit eines Näherungsverfahrens.

Die einparametrischen Geschwindigkeitsprofile (z.B. von Pohlhausen [zit. 8]) sowie die zweiparametrischen Geschwindigkeitsprofile (z.B. von Geropp [4]) der Einphasenströmung können nicht für die Zweiphasenströmung übernommen werden, da die Rand- und Übergangsbedingungen an der Phasengrenzfläche der Dampfgrenzschicht völlig verschieden sind von den Haftbedingungen und Wandbindungen der Einphasengrenzschicht an der Wand.

Um eine gute Genauigkeit des Ansatzes für das Geschwindigkeitsprofil in Grenzschichten mit Druckabfall bzw. Druckanstieg zu erzielen, müsste man, wie Geropp [4] es zeigte, den Grad des Polynoms variabel ansetzen. Damit würde aber die Zahl der Unbekannten—die Grenzschichtdicken des Dampfes  $\delta$  und des Kondensats  $\delta_K$ , die Geschwindigkeitskomponente an der Phasengrenzfläche  $u_{\delta_K}$  und die variable Potenz des Polynomgrades—grösser sein als die Zahl der Bestimmungsgleichungen, so dass man im vorliegenden Fall den Grad des Polynoms festlegen muss. Hier wird ein Polynom 4. Grades angesetzt. Für diesen Polynomansatz gelten folgende Rand- und Übergangsbedingungen:

*Randbedingungen:*

An der Phasengrenzfläche  $\delta_K$ :

$$1. \quad u = u_{\delta_K} \neq 0, \quad (3.37)$$

$$v = v_{\delta_K} \neq 0, \quad (3.38)$$

$$2. \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\delta_K} = x \neq 0. \quad (3.39)$$

Am Aussenrand  $\delta$ :

$$3. \quad u = u_\delta(x) \quad (3.40)$$

und nach Walz [26]

$$4. \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_\delta = 0, \quad (3.41)$$

$$5. \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_\delta = 0. \quad (3.42)$$

Damit erhält der Polynomansatz folgende Form:

$$U(\eta) = K_0 + K_0^* F(\eta) + \varepsilon G(\eta) \quad (3.43)$$

mit

$$F(\eta) = 6\eta^2 - 8\eta^3 + 3\eta^4, \quad (3.44)$$

$$G(\eta) = \eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4, \quad (3.45)$$

$$\varepsilon(x) = \left. \frac{\partial U}{\partial \eta} \right|_{\eta=0}, \quad (3.46)$$

$$K_0(x) = \frac{u_{\delta_K}}{u_\delta}, \quad (3.47)$$

$$K_0^*(x) = 1 - K_0. \quad (3.48)$$

Mit dem Profilansatz, Gleichung (3.43), können die Definitionsgrössen in Gleichungen (3.21)–(3.23), (3.26) und (3.31) bestimmt werden. Sie gelten auch für variable Stoffwerte, wenn man entsprechende Beziehungen in den Integralen einsetzt. Nimmt man hier konstante Stoffwerte an, so ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$\frac{\delta_1}{\delta^*} = \frac{2}{5} K_0^* - \frac{\varepsilon}{20}, \quad (3.49)$$

$$\frac{\delta_2}{\delta^*} = K_0 \frac{\delta_1}{\delta^*} + \frac{4}{35} K_0^{*2} + \frac{1}{105} K_0^* \varepsilon - \frac{1}{252} \varepsilon^2, \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta_3}{\delta^*} = K_0 \left[ 1 - K_0^2 + 3 \left( \frac{\delta_2}{\delta^*} + K_0^* \frac{\delta_1}{\delta^*} - K_0^{*2} \right. \right. \\ \left. \left. - K_0 K_0^* \right) \right] + \frac{3}{5} K_0^* - \frac{2127}{5005} K_0^{*3} - \left( \frac{6381}{180180} \right. \\ \left. \times K_0^{*2} - \frac{1}{20} \right) \varepsilon - \frac{207}{49140} K_0^* \varepsilon^2 - \frac{1}{2860} \varepsilon^3, \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\frac{\delta_4}{\delta^*} = 0, \quad (3.52)$$

$$\beta_l = \frac{\delta_2}{\delta^*} \left( \frac{144}{105} K_0^{*2} - \frac{12}{105} K_0^* \varepsilon + \frac{3}{35} \varepsilon^2 \right). \quad (3.53)$$

Für dieses Näherungsverfahren ist es aber zweckmässig, mit anderen Parameter zu rechnen. Nach Walz [11] definiert man folgende Formparameter:

$$H_{32} = H_{32}(\varepsilon, K_0) = \frac{\delta_3}{\delta_2}, \quad (3.54)$$

$$H_{12} = H_{12}(\varepsilon, K_0) = \frac{\delta_1}{\delta_2}, \quad (3.55)$$

$$\alpha_l = \alpha_l(\varepsilon, K_0) = \left. \frac{\partial(u/u_\delta)}{\partial(y/\delta_2)} \right|_{\delta_K} \quad (3.56)$$

Übergangsbedingungen:

$$(u_K)_{\delta_K} = u_{\delta_K}, \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \rho_{\delta_K} \left( u_{\delta_K} \frac{du_{\delta_K}}{dx} + v_{\delta_K} \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{\delta_K} = \rho_\delta u_\delta \frac{du_\delta}{dx} \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{\delta_K} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Gleichung (3.58) wird umgeformt. Zunächst ersetzt man  $v_{\delta_K}$  ( $v_{\delta_K} < 0$ ) und verwendet zu diesem Zweck Gl. (3.5) und Gl. (3.17). Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \rho_{\delta_K} u_{\delta_K} \frac{du_{\delta_K}}{dx} + \left( \frac{\lambda_K}{r} \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{\delta_K} - \rho_{\delta_K} u_{\delta_K} \frac{d\delta_K}{dx} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{\delta_K} \\ = \rho_\delta u_\delta \frac{du_\delta}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{\delta_K}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Mit Gleichungen (3.11) bis (3.15) und Gleichung (3.18) erhält man in dimensionsloser Form folgende Beziehungen:

$$U''(0) - K_T \vartheta'(1) \frac{U'^2(0)}{U'_K(1)} = -\gamma, \quad (3.60)$$

mit

$$\begin{aligned} \gamma = \frac{\rho_{\delta_K}}{\mu_\delta} \left( \frac{\mu_K}{\mu_{\delta_K}} \right) u_{\delta_K} \delta_0^{*2} \left[ U'(0) \frac{d}{dx} \left( \frac{U'_K(1)}{U'(0)} \right) \right. \\ \left. + \frac{U'_K(1)}{\delta^*} \frac{d\delta^*}{dx} - \frac{dK_0}{dx} \right] - \left( 1 - \frac{\rho_{\delta_K}}{\rho_\delta} K_0^2 \right) \\ \times \frac{\rho_\delta}{\mu_\delta} \delta^{*2} \frac{du_\delta}{dx}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

### 3.5 Näherungsverfahren

Einige Näherungsverfahren zur Berechnung von Grenzschichten der Einphasenströmung beruhen auf folgendem Prinzip. Durch Linearisierung und Mittelwertbildung universeller Funktionen wird die Differentialgleichung so vereinfacht, dass eine Quadratur möglich ist. Von Walz [11] wurde ein Näherungsverfahren entwickelt, dass für laminare und turbulente Grenzschichten bei kompressibler und inkompressibler Strömung mit und ohne Wärmeübergang anwendbar ist. Bei diesem Verfahren wird die vorgegebene Geschwindigkeitsverteilung der Aussenströmung  $u_\delta(x)$  durch einen Polygonzug mit beliebig kleinen Schritten  $\Delta x$  ersetzt. Bei kleinen Schrittweiten können für die Parameter Mittelwerte gesetzt werden. Damit liegen auch Mittelwerte für die zugehörigen universellen Funktionen fest, und die Differentialgleichung kann über die Abschnittsbreite  $\Delta x$  geschlossen integriert werden. Es ist somit eine schrittweise Lösung der Gleichung möglich mit einer für das einzelne Integrationsintervall beliebig genauen Quadraturformel [11]. Die Näherungslösung auf der Basis des Walzschens Verfahrens wurde von Geropp [4] für laminare Einphasenströmung verbessert.

Hier wird nun in entsprechender Weise ein Näherungsverfahren für die Zweiphasenströmung angegeben. Zur Berechnung der im

letzten Abschnitt angegebenen Unbekannten stehen folgende Gleichungen zur Verfügung:

1. *Impulssatz*. In Gleichung (3.24) ersetzt man zweckmässigerweise die gesuchte Impulsverlstdicke  $\delta_2$  durch eine zur Grenzschichtdicke proportionale Grösse. Mit folgenden Definitionen nach Walz [11]:

$$Z = \delta_2 Re_{\delta_2} \quad (3.62)$$

mit

$$Re_{\delta_2} = \frac{u_\delta \delta_2 \rho_\delta}{\nu_\delta}, \quad (3.63)$$

$$\Gamma = \gamma \left( \frac{\delta_2}{\delta^*} \right)^2 \quad (3.64)$$

und mit Hilfe von Gleichung (3.60) wird der Impulssatz umgeformt. Es ergibt sich

$$\frac{dZ}{dx} + ZF_1 \frac{du_\delta/dx}{u_\delta} - F_2 = 0, \quad (3.65)$$

mit

$$F_1 = 3 + 2H_{12} + \frac{\frac{1}{\rho_\delta} \frac{d\rho_\delta}{dx} + \frac{1}{\mu_\delta} \frac{d\mu_\delta}{dx}}{\frac{1}{u_\delta} \frac{du_\delta}{dx}}, \quad (3.66)$$

$$F_2 = 2 \frac{\mu_{\delta K}}{\mu_\delta} \{1 - F^*[H_{32}(\varepsilon, K_0), \Gamma(K_T, \varepsilon, K_0), K_0]\} \quad (3.67)$$

mit

$$F^* = (1 - K_0) \frac{U''(0) + \Gamma/(\delta_2/\delta^*)^2}{U'^2(0)}. \quad (3.68)$$

Gleichung (3.65) ist eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung. Die variablen Koeffizienten  $F_1$  und  $F_2$  sind Funktionen der Formparameter  $H_{32}$  und  $\Gamma$ , des Parameters  $K_0$  sowie des konstanten Parameters  $K_T$ . Eine Trennung der Variablen ist deshalb nicht möglich. Nach dem Walzschen Vorgehen† kann die Gleichung aber schrittweise gelöst werden. Man integriert zwischen beliebig klein gewählten Intervallen. Mit dem Integrationsfaktor

$$\exp \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{F_1}{u_\delta} \frac{du_\delta}{dx} dx \right) \quad (3.69)$$

integriert man Gleichung (3.65). Es ergibt sich

$$Z_{i+1} = \exp \left( - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{F_1}{u_\delta} \frac{du_\delta}{dx} dx \right) \left[ Z_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} F_2 \exp \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{F_1}{u_\delta} \frac{du_\delta}{dx} dx \right) dx \right]. \quad (3.70)$$

Die Koeffizientenfunktionen  $F_1$  und  $F_2$  sind nicht explizit von  $x$  abhängig, sondern von den  $x$ -abhängigen Parametern.

Bei klein gewählten Schrittweiten  $\Delta x$  ändern sich diese Parameter nur sehr wenig, so dass man für sie zwischen zwei aufeinander folgenden Punkten je den Mittelwert einsetzen darf. Damit werden im Intervall  $\Delta x$  die Koeffizientenfunktionen  $F_1$  und  $F_2$  als konstant angenommen. Der Rechenfehler ist vernachlässigbar klein [11]. Unter diesen Voraussetzungen erhält Gleichung (3.70) folgende Form:

$$Z_{i+1} = A_Z Z_i + B_Z \bar{F}_2 \Delta x, \quad (3.71)$$

mit

$$A_Z = \left( \frac{u_{\delta_i}}{u_{\delta_{i+1}}} \right)^{\bar{F}_1}, \quad (3.72)$$

$$B_Z = \frac{1 - A_Z \frac{u_{\delta_i}}{u_{\delta_{i+1}}}}{(1 + \bar{F}_1) \left( 1 - \frac{u_{\delta_i}}{u_{\delta_{i+1}}} \right)} \quad (3.73)$$

Gleichung (3.71) bis (3.73) haben die gleiche Form wie die Gleichungen (4.42)–(4.45) von Walz im [11]. Sie unterscheiden sich aber durch die Koeffizientenfunktionen  $F_1$  und  $F_2$ .

2. *Energiesatz Gleichung* (3.32). In ähnlicher Weise formt man Gleichung (3.32) mit Gleichungen (3.54)–(3.56), (3.60) und (3.64) um und erhält nach Zwischenrechnungen folgende Gleichung:

† Siehe Rechenverfahren II, S. 118, [11].

$$\frac{dH_{32}}{dx} + H_{32} F_3 \frac{du_\delta/dx}{u_\delta} - \frac{F_4}{Z} = 0, \quad (3.74)$$

mit

$$F_3 = 1 - H_{12} + 2 \frac{\delta_4}{\delta_3}, \quad (3.75)$$

$$F_4 = \frac{\mu_{\delta K}}{\mu_\delta} \left\{ 2\beta_l + \alpha_l(2K_0 - H_{32}) \right. \\ \left. + \alpha_l F^* [H_{32}(\varepsilon, K_0), \Gamma(K_T, \varepsilon, K_0), K_0] \right. \\ \left. \times [H_{32} - (1 + K_0)] \right\}, \quad (3.76)$$

mit  $F^*$  aus Gleichung (3.68).

Auch hier sind die Koeffizientenfunktionen  $F_3$  und  $F_4$  von den Parametern abhängig. Die oben über die Koeffizientenfunktionen  $F_1$  und  $F_2$  in den Intervallen  $\Delta x$  gemachten Aussagen gelten auch für die Koeffizientenfunktionen  $F_3$  und  $F_4$ . Zur Integration von Gleichung (3.74) setzt man nun die Mittelwerte von  $F_3$ ,  $F_4$  und  $Z$  ein. Es ergibt sich folgende Beziehung:

$$H_{32_{i+1}} = A_H H_{32_i} + B_H \bar{F}_H \frac{\Delta x}{Z}, \quad (3.77)$$

mit

$$A_H = \left( \frac{u_{\delta_i}}{u_{\delta_{i+1}}} \right)^{\bar{F}_3}, \quad (3.78)$$

$$B_H = \frac{1 - A_H \frac{u_{\delta_i}}{u_{\delta_{i+1}}}}{(1 + \bar{F}_3) \left( 1 - \frac{u_{\delta_i}}{u_{\delta_{i+1}}} \right)}. \quad (3.79)$$

Gleichungen (3.77) bis (3.79) sind identisch mit den Gleichungen (4.43) bis (4.47) von Walz [11]; es unterscheiden sich lediglich die Koeffizientenfunktionen  $F_3$  und  $F_4$  in den Gleichungen (3.75) und (3.76).

**3. Definitionsgleichung für den Formparameter  $\Gamma$ , Gleichung (3.61) und Gleichung (3.64).** Mit Gleichung (3.64) und Gleichung (3.62) formt man Gleichung (3.61) um. Aus Gleichung (3.35) und Gleichung (3.43) erhält man zunächst  $U'_K(1) = K_0$  und  $U'(0) = \varepsilon$ . Damit ergibt sich nach Zwischenrechnung folgende Beziehung:

$$\Gamma = K_0^2 Z \left( \frac{1}{\delta^*} \frac{d\delta^*}{dx} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dx} \right) \\ + (1 - K_0^2) \frac{Z}{u_\delta} \frac{du_\delta}{dx}. \quad (3.80)$$

Aus Gleichung (3.50) erhält man nach Zwischenrechnungen

$$\frac{1}{\delta^*} \frac{d\delta^*}{dx} = \frac{1}{2Z} \frac{dZ}{dx} - \frac{1}{2u_\delta} \frac{du_\delta}{dx} \\ - \frac{g_1 \frac{dK_0^*}{dx} + g_2 \frac{d\varepsilon}{dx}}{\delta_2/\delta^*}, \quad (3.81)$$

mit

$$g_1 = \frac{2}{5} K_0 + \frac{8}{35} K_0^* + \frac{1}{105} \varepsilon - \frac{\delta_1}{\delta^*}, \quad (3.82)$$

$$g_2 = \frac{1}{105} K_0^* - \frac{1}{20} K_0 - \frac{2}{252} \varepsilon, \quad (3.83)$$

$$K_0^* = 1 - K_0.$$

Aus Gleichungen (3.51) und (3.54) ergibt sich

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{\frac{\delta_2}{\delta^*} \frac{dH_{32}}{dx} + (g_1 H_{32} - g_3) \frac{dK_0^*}{dx}}{g_4 - g_2 H_{32}}, \quad (3.84)$$

mit

$$g_3 = - \left[ 1 - K_0^2 + 3 \left( \frac{\delta_2}{\delta^*} + K_0^* \frac{\delta_1}{\delta^*} - K_0^{*2} - K_0 K_0^* \right) \right] + 2K_0^2 + 3K_0 \frac{\delta_1}{\delta^*} \\ - 3K_0 K_0^* - 3K_0^2 + \frac{3}{5} - \frac{6381}{5005} K_0^{*2} \\ - \frac{12762}{180180} K_0^* \varepsilon - \frac{207}{49140} \varepsilon^2 + 3K_0 g_1 + \frac{6}{5} K_0 K_0^*, \quad (3.85)$$

$$g_4 = 3K_0 g_2 - \frac{3}{20} K_0 K_0^* - \left( \frac{6381}{180180} K_0^{*2} - \frac{1}{20} \right) \\ - \frac{414}{49140} K_0^* \varepsilon - \frac{3}{2860} \varepsilon^2. \quad (3.86)$$

Bei der Dampfströmung mit beliebigen Druckgradienten stehen zur Berechnung der im Abschnitt 3.4.2 angegebenen Unbekannten – die zwei Formparameter  $H_{32}$  und  $\Gamma$ , der Geschwindigkeitsparameter  $K_0$  und die Grenzschichtdicke  $\delta^*$  – nur drei Bestimmungsgleichungen zu Verfügung. Die Lösung wird vereinfacht, indem man für den Geschwindigkeitsparameter  $K_0$  beliebige konstante Werte einsetzt. Die Geschwindigkeitskomponente in  $x$ -Richtung an der Phasengrenzfläche ist klein gegenüber der Aussengeschwindigkeit. Die Berechnungen für die ebene Platte zeigten, dass dieses Verhältnis von der Größenordnung 5% ist, weshalb Sparrow et al [10] dieses Verhältnis vernachlässigten, d.h.  $K_0 = 0$  setzten.

Mit den Voraussetzungen kann man die gekoppelten Gleichungen nur iterativ lösen. In der Rechnung werden jeweils die Unbekannten für den folgenden Punkt  $x_i + \Delta x$  zunächst geschätzt und dann berechnet. Die Lösung wird nach dem angegebenen Rechenschema durchgeführt.

### Größen der Aufgabenstellung

Folgende Größen der Aufgabenstellung sind vorgegeben:

- (a) Stoffwerte vom Dampf und Kondensat in den Grenzschichten
- (b) Die Reynoldszahl und die Stoffwerte des anströmenden Dampfes:  $Re_\infty$ ,  $\rho_\infty$ ,  $\mu_\infty$ , ...
- (c) Sattdampftemperatur  $T_s$  und Wandtemperatur  $T_w$ .
- (d) Geschwindigkeitsverteilung der Potentialströmung: Für einen Kreiszylinder gilt aus [4] nach Hiemenz und Gortler [zit. 4] folgende Beziehung:

$$\frac{u_\delta}{u_\infty} = x^* - 0,006289 x^{*3} - 0,00004615 x^{*5}, \quad (3.87)$$

mit

$$\begin{aligned} x^* &= x/l \\ l &= 1 \text{ cm} \\ R &= 4,87 \text{ cm.} \end{aligned}$$

### Anfangswerte der Grenzschichtrechnung

Bei der Umströmung einer zweidimensionalen Körperkontur beginnen die Grenzschichten des Dampfes und des Kondensats an der Stelle, an der sich die Strömung vor dem Hindernis verzweigt. Solche Verzweigungsstellen sind der Staupunkt am stumpfen Vorderteil eines angeströmten Körpers, die Vorderkante eines angeströmten Keils oder einer ebenen Platte [4].

Bei allgemeinen Umströmungsproblemen zweidimensionaler Art nähert man üblicherweise die Strömung in der unmittelbaren Umgebung der Anströmstelle durch eine Keilströmung an. Die Grenzschicht dieser Keilströmung hat eine ähnliches Geschwindigkeitsprofil, so dass auch die Formparameter von  $x$  unabhängig sind. Als Anfangswerte werden deshalb diese Formparameter übernommen, die für bestimmte Geschwindigkeitsprofile bei der Behandlung von Einphasenströmungsproblemen ermittelt wurden.

In dieser Arbeit wurde der vordere Teil des querangeströmten Zylinders durch einen Keil mit dem Öffnungswinkel  $\pi$  ersetzt. Für den Profilanatz 4. Grades übernimmt man nach Pohlhausen [zit. 8,11]

$$\begin{aligned} H_{32}^0 &= 1,60428 \\ \Gamma^0 &= 0,077. \end{aligned} \quad (3.88)$$

### Endwerte der Grenzschichtrechnung

Theoretisch müsste der Ablösepunkt aus den bekannten Kriterien für Einphasenströmungen bestimmt werden. Die Ablösung der laminaren Dampfgrenzschicht würde dann durch die Bedingung, dass die Schubspannung an der Phasengrenzfläche Null ist, gekennzeichnet sein. Für das hier verwendete Geschwindigkeitsprofil 4. Grades übernimmt man nach Pohlhausen [zit. 8,11] für

$$\begin{aligned} H_{32}^A &= 1,531 \\ \Gamma^A &= -0,1567. \end{aligned} \quad (3.89)$$

### Bestimmung der Grenzschichtgrößen und des Wärmeübergangskoeffizienten

Mit den berechneten Formparametern  $H_{32}$  und  $\Gamma$ , dem Dickenparameter  $Z$  für beliebige Geschwindigkeitsparameter  $K_0$  ist es möglich, die gesuchten Grenzschichtgrößen und den Wärmeübergangskoeffizienten für beliebige konstante Wärmeübergangsparameter  $K_T$  zu berechnen.

#### Örtliche Reynoldszahl

Mit dem berechneten Dickenparameter  $Z$  kann man zunächst die Impulsverlustdicke  $\delta_2$  bestimmen. Aus Gleichung (3.62) erhält man durch Erweitern folgendes:

$$\frac{\delta_2}{L} \sqrt{(Re_\infty)} = \sqrt{\left( \frac{Z^* \mu_\delta \rho_\infty}{u_\delta^* \mu_\infty \rho_\delta} \right)}, \quad (3.90)$$

mit

$$Z^* = \frac{Z}{L},$$

$$u_\delta^* = \frac{u_\delta}{u_\infty},$$

$$Re_\infty = \frac{u_\infty \rho_\infty L}{\mu_\infty}.$$

Aus Gleichung (3.63) ergibt sich mit Gleichung (3.90) folgende Beziehung für  $Re_{\delta_2}$ :

$$\frac{Re_{\delta_2}}{\sqrt{(Re_\infty)}} = \sqrt{\left( Z^* u_\delta^* \frac{\rho_\delta \mu_\infty}{\rho_\infty \mu_\delta} \right)}. \quad (3.91)$$

#### Schubspannung an der Phasengrenzfläche

Aus der Definition der Schubspannung an der Phasenfläche Gleichung (3.18) lässt sich folgende Beziehung gewinnen:

$$\frac{\tau_{\delta_K} L}{\mu_\infty u_\infty \sqrt{(Re_\infty)}} = \frac{\mu_{\delta_K}}{\mu_\delta} \alpha_l \frac{u_\delta^{*\frac{1}{2}}}{Z^{*\frac{1}{2}}} \sqrt{\left( \frac{\rho_\delta \mu_\delta}{\rho_\infty \mu_\infty} \right)}. \quad (3.92)$$

#### Wärmeübergangskoeffizient $\alpha$

Die Wärmestromdichte an der Wand ist durch folgende Beziehung definiert:

$$\dot{q} = - \lambda_K \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (3.93)$$

Nach Umformung mit Gleichung (3.18) ergibt sich

$$\dot{q} = - K_T r g'(1) \mu_{\delta_K} \frac{\delta_2}{\delta^*} \frac{U'(0)}{U'_K(1)} \frac{1}{\delta_2}. \quad (3.94)$$

Mit der Definition des Wärmeübergangskoeffizienten

$$\alpha = \frac{\dot{q}}{T_{\delta_K} - T_w}, \quad (3.95)$$

erhält man mit Gl. (3.94), (3.60) und (3.64)

$$\alpha = \frac{C_K \mu_\infty}{Pr_K L K_T \mu_\infty} \alpha_l \frac{Re_{\delta_2}}{Z^*} \left[ \frac{6\varepsilon - 12K_0^*}{\varepsilon^2} - \frac{\Gamma}{(\varepsilon \delta_2 / \delta^*)^2} \right] \quad (3.96)$$

Der mittlere Wärmeübergangskoeffizient lässt sich durch eine numerische Integration über  $\alpha$  vom Staupunkt bis zur Stelle  $x_E^*$  ermitteln.

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{x_E^*} \int_0^{x_E^*} \alpha \, dx. \quad (3.97)$$

## 4. ERGEBNISSE UND DISKUSSION

Mit dem in Kapitel 3.5 entwickelten Näherungsverfahren wird die Kondensation an einem Kreiszylinder berechnet. In diesem Beispiel werden konstante Stoffwerte angenommen. Weiterhin wurde die von Hiemenz-Gortler [zit 4] angegebene Geschwindigkeitsverteilung für die Aussenströmung zugrunde gelegt.

In Bild 2 sind die Formparameter  $H_{32}(x)$  und  $\Gamma(x)$  über die Lauflänge  $x^*$  aufgetragen worden. Wie erwartet, ist der Verlauf der Kurven analog zu den für Einphasenströmung berechneten.† Vom Staupunkt an steigen die Kurven inner-

† Nachgerechnet für einen Kreiszylinder nach dem Rechenverfahren II von Walz (S. 230, [11]) und den verbesserten Interpolationsformeln von Fernholz und Wirz [3].

$$\begin{aligned} H_{12} &= 4,2845 - 4,183 (H_{32} - 1,515)^{0,3886} \\ \alpha_l &= 1,7261 (H_{32} - 1,515)^{0,7158} \\ \beta_\varepsilon &= 0,1564 + 2,1921 (H_{32} - 1,515)^{1,7}. \end{aligned} \quad (4.1)$$



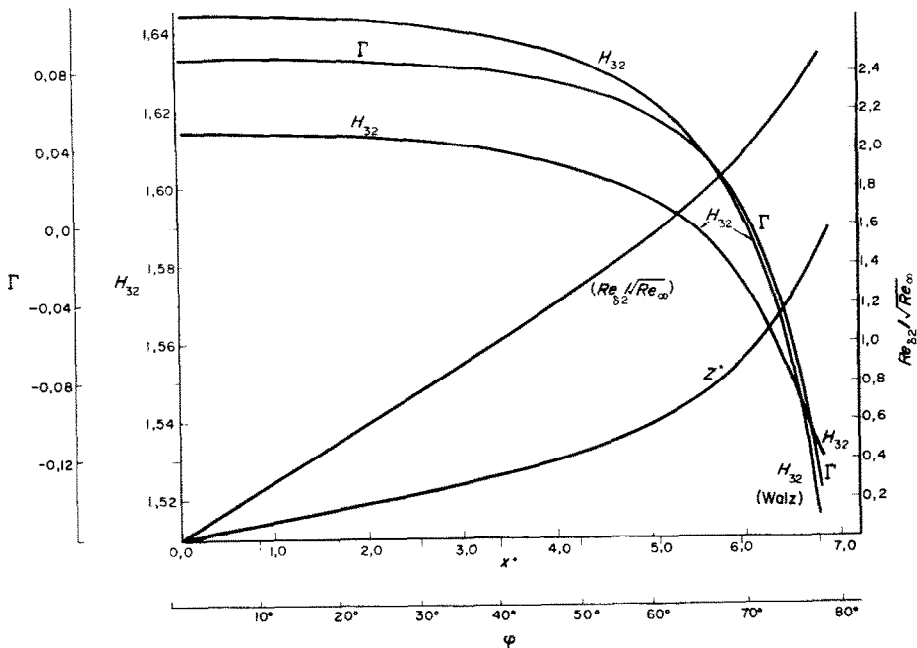


BILD 2. Formparameter  $H_{32}$  und  $\Gamma$ , Dickenparameter  $Z^*$  und normierte Reynoldszahl  $Re_{\delta 2}/\sqrt{(Re_{\infty})}$  für einen Kreiszylinder.

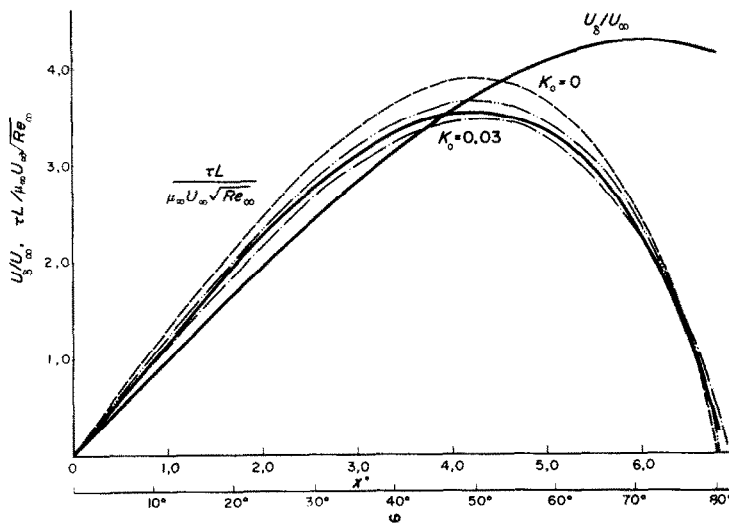


BILD 3. Für einen Kreiszylinder: Potentialgeschwindigkeit  $u_{\delta}/\mu_{\infty}$  nach Hiemenz-Görtler [4].

Schubspannung:  $\tau L/\mu_{\infty} U_{\infty}/(Re_{D\infty})$

- An der Phasengrenze der Zweiphasenströmung
- - - An der Wand der Einphasenströmung nach Walz [11]
- - - An der Wand der Einphasenströmung nach Geropp [4]

halb eines kleinen Bereiches der Lauflänge, fallen dann bis zum Ablösepunkt monoton. Dieser Verlauf ist auch beim Walzschen Verfahren für Einphasenströmungsgrenzschichten zu beobachten.<sup>†</sup> Theoretisch müssten die Formparameter vom Staupunkt an bis zum Ablösepunkt monoton fallen, wie es aus dem Pohlhausenschen Verfahren zu ersehen ist (siehe

Kurven ist ähnlich wie bei den berechneten der Einphasenströmungsgrenzschichten.

In Bild 3 wurde die Schubspannung an der Phasengrenzfläche über die Lauflänge  $x^*$  aufgetragen. Wie zu erwarten ist, sind die Schubspannungen an der Phasengrenzfläche kleiner als die Schubspannungen an der Wand. Um dies deutlich zu machen, wurden auch in diesem Bild

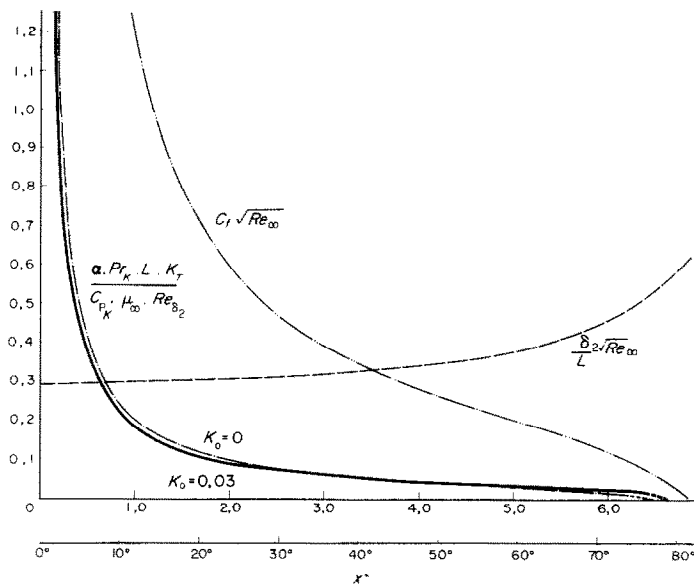


BILD. 4. Grössen für einen Kreiszylinder: Zweiphasenströmung  
Impulsverlustdicke  $\delta_2/L \sqrt{(Re_\infty)}$   
Reibungsbeiwert an der Phasengrenze  $C_f \sqrt{(Re_\infty)}$   
Wärmeübergangskoeffizient  $(\alpha Pr_K L K_T / c_{pK} \mu_\infty Re_{\delta_2})$ .

Schlichting, S.196 [8]). Der Anstieg der Kurven  $H_{32}(x)$  und  $\Gamma(x)$  in der Nähe des Staupunktes ist auf das Versagen des Verfahrens zurückzuführen, das aber wie bei den Einphasenströmungsgrenzschichten (siehe Geropp, S.90 [4]) gute Ergebnisse im Ablösebereich liefert. Das Verfahren wird für Geschwindigkeitsparameter  $K_0 > 0,04$  wegen des Anstieges der Werte der Formparameter in der Nähe des Staupunktes instabil.

In Bild 2 wurde der Dickenparameter  $Z^*$  und die Reynoldszahl  $Re_{\delta_2}/\sqrt{(Re_\infty)}$  über die Lauflänge  $x^*$  aufgetragen. Der Verlauf der

die von Geropp [4] und Walz [11] berechneten Schubspannungen an der Wand für die Einphasengrenzschicht aufgetragen. Daraus kann man folgende Schlussfolgerungen ziehen:

—Der theoretische Ablösepunkt liegt bei  $x^* = 6,83$  ( $\varphi = 80,7^\circ$ ) für  $K_0 = 0$  und bei  $x^* = 6,90$  für  $K_0 = 0,03$ .

—Der Ablösepunkt liegt wegen des Kondensationsvorgangs stromab vom Ablösepunkt der Einphasengrenzschicht.

—Für grössere Werte von  $K_0$  verschiebt sich der Ablösepunkt weiter stromabwärts.

In Bild 4 wurde der Verlauf des normierten örtlichen Reibungsbeiwert ( $C_f \sqrt{(Re_\infty)}$ ) und des örtlichen Wärmeübergangskoeffizienten

<sup>†</sup> Siehe Fussnote auf 1152.

$$\left( \frac{\alpha Pr_K L K_T}{c_K \mu_\infty Re_{\delta_2}} \right)$$

über die Lauflänge dargestellt. Im Staupunkt-bereich ist die Grenzschichtdicke des Kondensats wegen der geringen Zähigkeitskräfte klein, so dass der örtliche Wärmeübergangskoeffizient hier grosse Werte annimmt. In der Nähe des Ablösepunktes wird der Wärmeübergangskoeffizient zu Null, d.h. die Kondensation hört auf. Hier sind folgende Bemerkungen zu machen: In der Nähe des Ablösepunktes werden die Schubspannungen an der Phasengrenzfläche zu Null. Es existiert keine treibende Kraft für den Kondensatfilm. Weiterhin muss hier überhitzter Dampf berücksichtigt werden und vermutlich darf die Reibungswärme in der Dampfgrenzschicht nicht vernachlässigt werden.

Den mittleren Wärmeübergangskoeffizienten  $\bar{\alpha}$  erhält man aus Gleichungen (3.96) und (3.97) durch numerische Integration vom Staupunkt bis zum Punkt  $x_E^*$ , wo die Kondensation aufhört.

Für  $K_0 = 0$  und  $x_E^* = 6.43$  ergibt sich

$$\bar{\alpha} = 0.463 \frac{\mu_\infty}{\mu_K} \frac{\lambda_K}{K_T D} \sqrt{(Re_{D,\infty})}, \quad (4.2)$$

oder

$$\bar{\alpha} = 0.463 \frac{\rho_\infty \mu_\infty}{\rho_K \mu_K} \frac{Pr_K r}{C_K (T_s - T_w)} \sqrt{\left( \frac{\lambda_K^2 \rho_K \mu_\infty}{\mu_K D} \right)}, \quad (4.3)$$

mit

$$Re_{D,\infty} = \frac{u_\infty D}{\nu_\infty}. \quad (4.4)$$

Shekriladze und Gomelaury [9] berücksichtigten nicht den Druckgradient und die Trägheitskräfte in der Dampfgrenzschicht. Sie gaben folgende Beziehung (Gleichung 25, [9]) an:

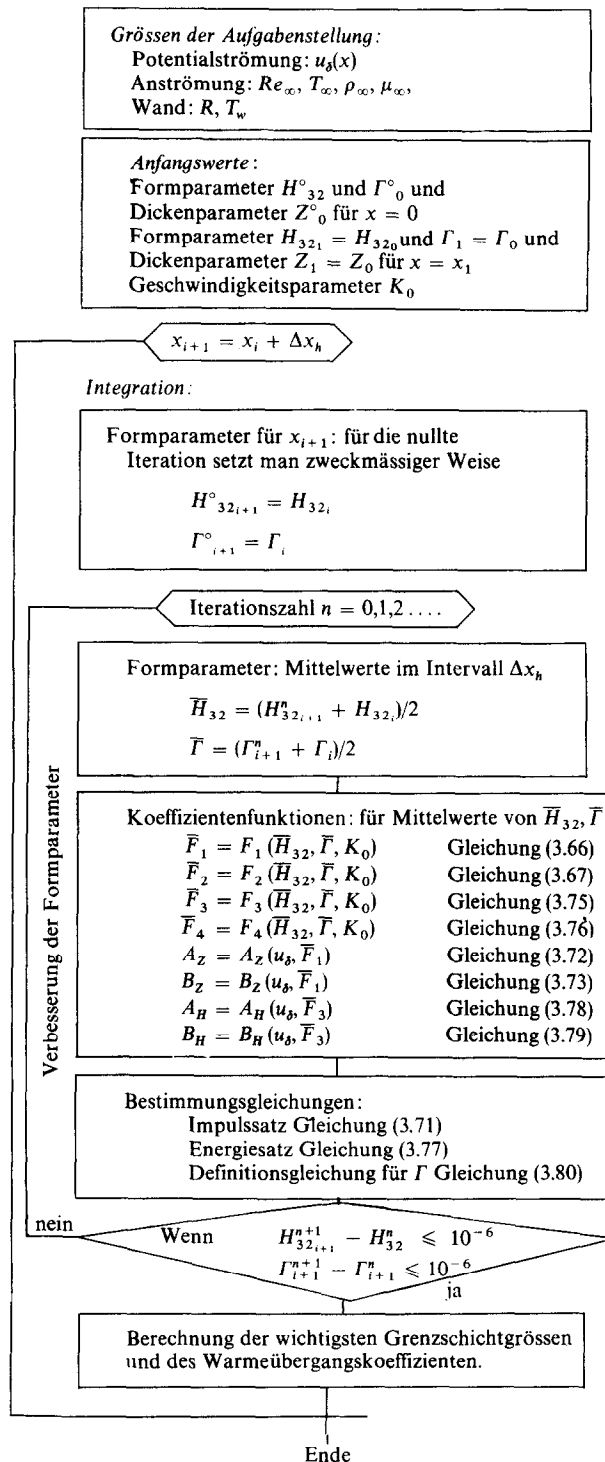
$$\bar{\alpha}_{s+6} = 0.9 \sqrt{\left( \frac{\lambda_K^2 \rho_K \mu_\infty}{\mu_K D} \right)}.$$

Gegenüber diesem Ausdruck enthält Gleichung (4.3) die Stoffwerte des Dampfes und die Temperaturdifferenz oder den Wärmeübergangsparameter  $K_T$ , wie schon in den Beziehungen für den Wärmeübergangskoeffizienten an ebenen Platten [5, 6, ...].

## LITERATUR

1. N. M. CHEN, An analytical study of laminar film condensation, *J. Heat Transfer* **2**, 48–53 (1961).
2. V. E. DENNY and A. F. MILLS, Laminar film condensation of a flowing vapor on a horizontal cylinder at normal gravity, *J. Heat Transfer* **11**, 495–500 (1969).
3. H. FERNHOLZ, *Grenzschichttheorie*. T.U. Berlin (1969).
4. D. GEROPP, Näherungstheorie für kompressible laminare Grenzschichten mit zwei Formparameter für das Geschwindigkeitsprofil, Dissertation, Karlsruhe (1963).
5. J. C. Y. KOH, E. M. SPARROW and J. P. HARTNETT, The two phase boundary layer in laminar film condensation, *Int. J. Heat Mass Transfer* **5**, 941–954 (1962).
6. J. C. Y. KOH, An integral treatment of two-phase boundary layer in film condensation, *J. Heat Transfer* **83**, 359–362 (1961).
7. M. SCHMAL, Eine Näherungslösung für die Kondensation von laminar strömendem Dampf mit beliebigen Druckgradienten bei kleiner Mach-Zahl und konstanten Stoffwerten, Dissertation, Berlin (1970).
8. H. SCHLICHTING, *Grenzschicht-Theorie*. Verlag G. Braun, Karlsruhe (1965).
9. I. G. SHEKRILADZE and V. I. GOMELAURI, Theoretical study of laminar film condensation of flowing vapour, *Int. J. Heat Mass Transfer* **9**, 581–591 (1966).
10. E. M. SPARROW, W. J. MINKOWICZ and M. SADDY, Forced convection condensation in the presence of noncondensable and interfacial resistance, *Int. J. Heat Mass Transfer* **10**, 1829–1845 (1967).
11. A. WALZ, *Strömungs- und Temperaturgrenzschichten*. Verlag G. Braun (1966).
12. K. WIEGHARDT, Über einen Energiesatz zur Berechnung laminarer Grenzschichten, *Ing. Arch.* **16**, 231–242 (1948).

## ANHANG



## AN APPROXIMATIVE SOLUTION FOR THE CONDENSATION OF LAMINAR FLOWING VAPOUR WITH ARBITRARY PRESSURE GRADIENTS AT LOW MACH-NUMBER AND CONSTANT PROPERTIES

**Abstract**—Vapor and condensate flows on an arbitrary body curved in flow direction. In the condensate layer we considered only viscous forces and heat flow by conduction. In the vapor layer inertia and friction forces as well as pressure forces were considered. The temperature variation in the vapor layer was neglected. The problem was solved by an integral method. The integral equations are valid for flows with arbitrary pressure gradients with heat transfer. The velocity profile in the vapor layer was assumed to be a function of two shape parameters. Both the quantities of the boundary layer and the heat transfer coefficient were calculated from the stagnation point to the separation point. The average heat transfer coefficient was also calculated, and it includes the properties of the vapor and a heat transfer parameter which were not considered in the work of Shekriladze and Gomelauri.

## UNE SOLUTION APPROCHÉE POUR LA CONDENSATION D'UNE VAPEUR EN MOUVEMENT LAMINAIRE AVEC DES GRADIENTS DE PRESSION ARBITRAIRES POUR UN FAIBLE NOMBRE DE MACH ET DES PROPRIÉTÉS CONSTANTES

**Résumé**—La vapeur et le condensat s'écoulent sur un obstacle arbitraire courbe dans le sens de l'écoulement. Dans la couche de condensat on considère seulement les forces de viscosité et le flux thermique par conduction. Dans la couche de vapeur on prend en compte les forces d'inertie et de frottement aussi bien que les forces de pression. La variation de température dans la couche de vapeur est négligée. Le problème a été résolu par une méthode intégrale. Les équations intégrales sont valides pour des écoulements avec des gradients de pression arbitraires et avec transfert thermique. Le profil de vitesse dans la couche de vapeur est supposé être fonction de deux paramètres de forme. Les caractéristiques de la couche limite et le coefficient de transfert thermique sont calculés depuis le point d'arrêt jusqu'au point de décollement. Le coefficient de transfert thermique moyen a été aussi calculé en incluant les propriétés de la vapeur et un paramètre de transfert thermique qui n'avaient pas été considérés dans l'étude de Shekriladze et Gomelauri.

## ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ СЛУЧАЯ КОНДЕНСАЦИИ ПАРА В ЛАМИНАРНОМ ПОТОКЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ГРАДИЕНТОВ ДАВЛЕНИЯ, МАЛОМ ЧИСЛЕ МАХА И ПОСТОЯННЫХ СВОЙСТВАХ

**Аннотация**—Поток пара и конденсата обтекает произвольное тело, искривленное в направлении течения. Только вязкие силы и теплопроводность рассматриваются в слое конденсата. В слое пара рассматриваются силы инерции и трения, а также силы давления. Изменением температуры в слое пара пренебрегают. Задача решается интегральным методом. Интегральные уравнения справедливы для потоков с произвольными градиентами давления при наличии теплообмена. Предполагают, что профиль скорости в слое пара есть функция двух параметров формы. Пограничный слой и коэффициент теплообмена рассчитывались от критической точки до точки отрыва. Также рассчитывался средний коэффициент теплообмена, который учитывает свойства пара и параметр теплообмена, которые не рассматривались в работе Шекриладзе и Гомеллаури.